TP5

TRACÉ DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS.

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Portraits de phase dans le plan

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On s'intéresse au système différentiel $X' = AX$. On souhaite tracer plusieurs trajectoires de solutions pour observer leur comportement vis à vis des états équilibres du système. On utilise le programme suivant :

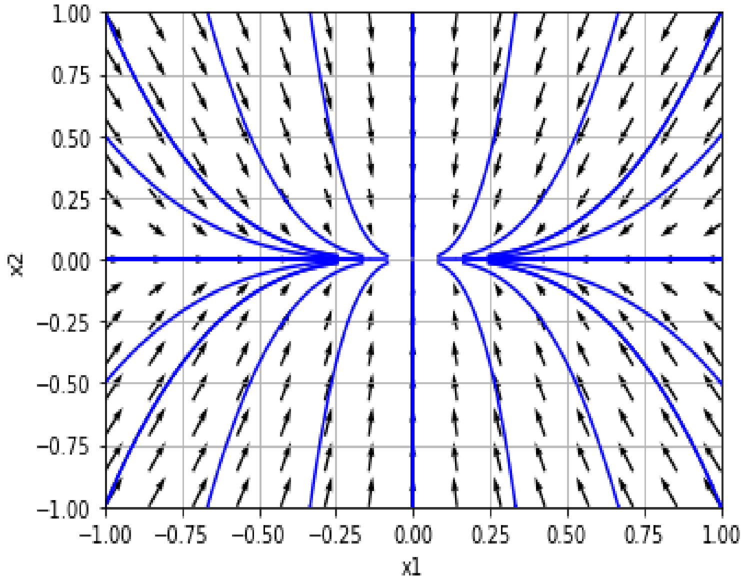
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

# On definit ici le systeme differentiel

def syst(y, t, a11, a12, a21, a22) :
 x1, x2 = y
 dydt = [a11 * x1 + a12 * x2, a21 * x1 + a22 * x2]
 return dydt

# Matrice A (choisir les coefficients)

a11, a12 = -1,0
a21, a22 = 0,-3

# Intervalle de temps sur lequel on trace la solution

t = np.linspace(0, 2, 51)

# Choix de la condition initiale

y0 = [0.75,0.5]

# On trace x2 en fonction de x1

# plot en temps positif

sol = odeint(syst, y0, t, args=(a11, a12, a21, a22))
plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], 'b')

# plot en temps negatif

sol = odeint(syst, y0, -t, args=(a11, a12, a21, a22))
plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], 'b')

# Configuration fenetre graphique

plt.grid()
plt.xlabel('x1')
plt.ylabel('x2')
plt.axis([-1,1,-1,1])

# Representation des tangentes aux trajectoires

g1  = np.linspace(-1,1,15)
g2  = np.linspace(-1,1,15)
A1, A2 = np.meshgrid(g1,g2)
V1,V2 = syst((A1,A2),t, a11, a12, a21, a22)
r1 = np.sqrt(1+V1**2)
r2 = np.sqrt(1+V2**2)
plt.quiver(A1, A2, V1/r1, V2/r2)
plt.show()
```

1.1. **Le cas d'une matrice A diagonale.** Dans cette section, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

1. Rappeler, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est solution de $X' = AX$.

On utilise le programme précédent, auquel on rajoute des boucles for pour faire varier les conditions initiales. Ceci permet de tracer plusieurs trajectoires de solutions dans la même fenêtre graphique.

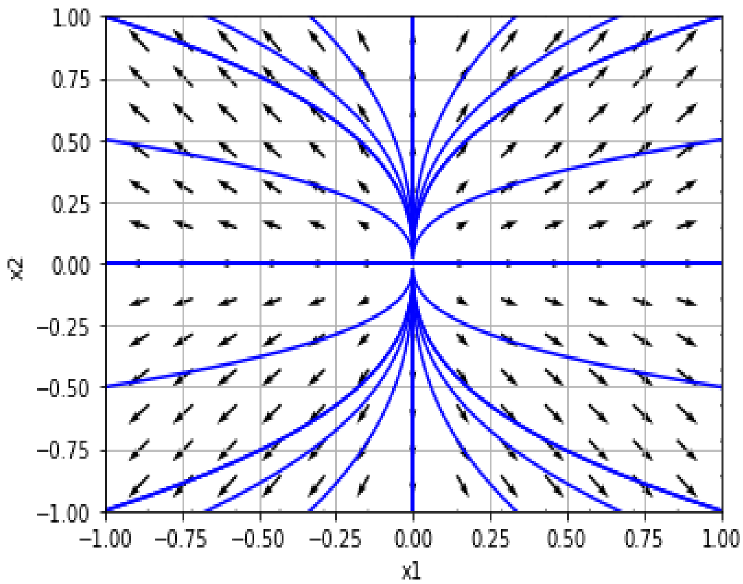
1.1.1. *Cas où les deux valeurs propres sont strictement négatives.* On choisit l'exemple $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. On obtient le tracé ci-dessous.



2. Faire apparaître l'unique état d'équilibre du système en rouge sur le tracé précédent.

3. Que remarque-t-on sur les trajectoires ? Comment appelle-t-on un tel point d'équilibre ?

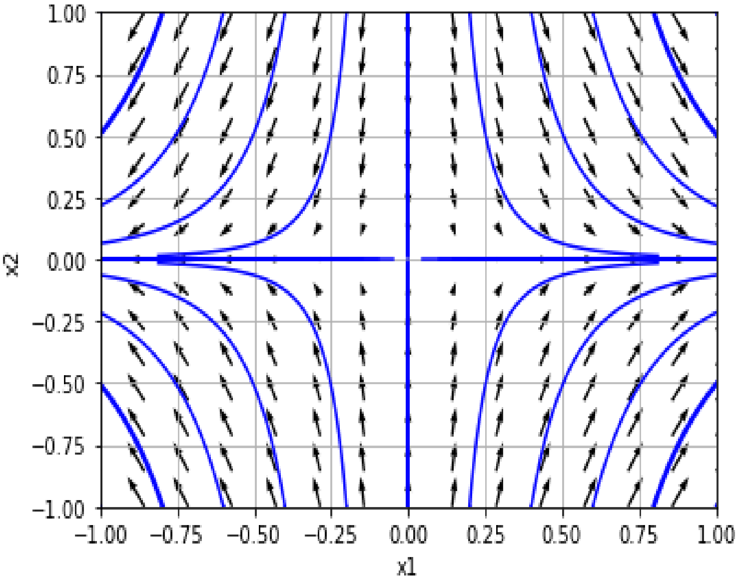
1.1.2. *Cas où les deux valeurs propres sont strictement positives.* On choisit l'exemple $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On obtient le tracé ci-dessous.



4. Faire apparaître l'unique état d'équilibre du système en rouge sur le tracé précédent.

5. Que remarque-t-on sur les trajectoires ? Comment appelle-t-on un tel point d'équilibre ?

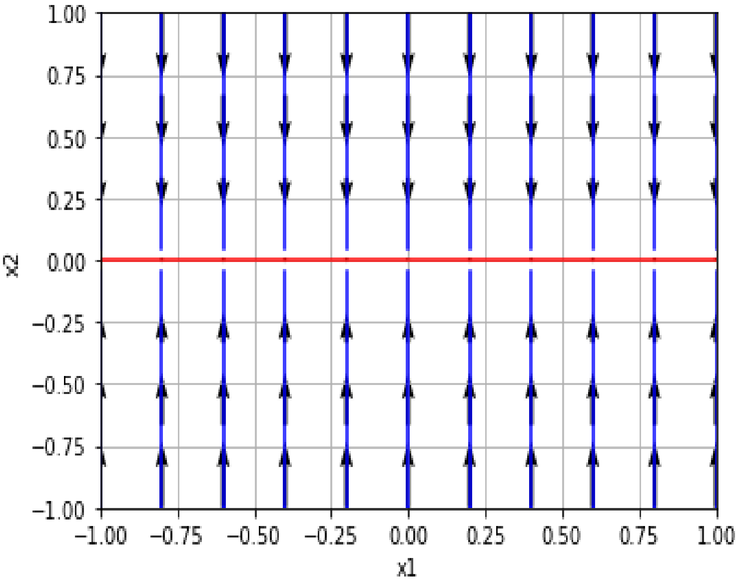
1.1.3. *Cas où les deux valeurs propres sont de signes opposés.* On choisit l'exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. On obtient le tracé ci-dessous.



6. Faire apparaître l'unique état d'équilibre du système en rouge sur le tracé précédent.

7. Que remarque-t-on sur les trajectoires ? Comment appelle-t-on un tel point d'équilibre ?

1.1.4. *Cas où une valeur propre est nulle et l'autre est strictement négative.* On choisit l'exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On obtient le tracé ci-dessous.



8. Faire apparaître les états d'équilibres du système en rouge sur le tracé précédent.

9. Que remarque-t-on sur les trajectoires ? Que peut-on dire sur les points d'équilibre ?

10. A quoi ressemblerait le dessin si on avait choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

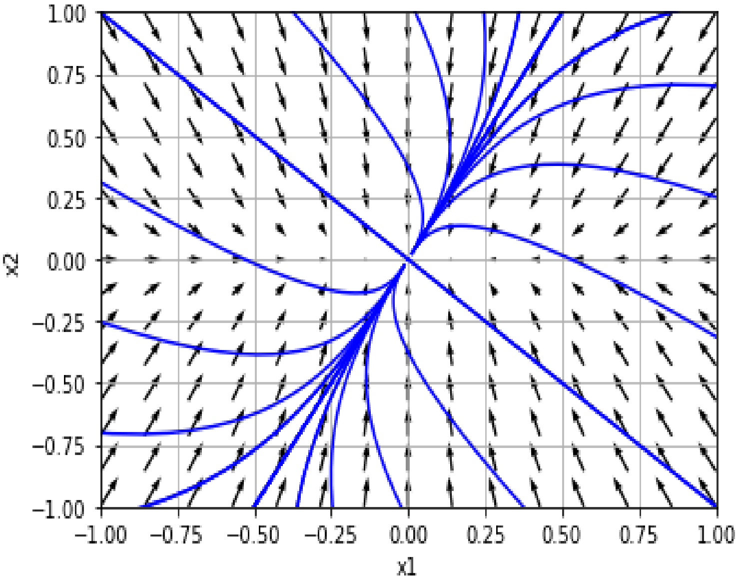
1.2. **Le cas d'une matrice A diagonalisable.** On considère dans cette partie une matrice A qui vérifie : $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale et P est une matrice inversible.

11. On note $X = PY$. Montrer que $X' = AX$ si et seulement si $Y' = DY$.

Ainsi, on peut résoudre l'équation $Y' = DY$ pour obtenir les solutions de l'équation $X' = AX$.
Dans l'exemple suivant, on choisit :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = PDP^{-1}$$

On obtient le tracé ci-dessous.



12. Faire apparaître l'unique état d'équilibre du système en rouge sur le tracé précédent.

13. Quelle comparaison peut-on faire avec le tracé obtenu dans le cas où A est diagonale ?

14. Dans le cas où A est diagonalisable, rappeler la condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A pour que tous les états d'équilibre soient stables.

2. Tracés de solutions pour un système différentiel 3×3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On s'intéresse au système différentiel $X' = AX$. On souhaite toujours tracer plusieurs trajectoires de solutions pour observer leur comportement vis à vis des états équilibres du système. Cependant, les trajectoires évoluent cette fois-ci dans un espace à 3 dimensions, ce qui n'est pas simple à représenter sur une feuille. Contrairement à la partie précédente, nous choisissons ici de tracer les 3 graphes des solutions x_1, x_2 et x_3.

2.1. **Cas où A possède 3 valeurs propres strictement négatives.** On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Rappeler comment fonctionne la fonction Python al.eig.

16. Recopier le programme Python suivant et le compiler.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[-1, 1 , -1], [-4, -5, 4], [-2, -1, 0]])
L = al.eig(A)
print(L[0])
```

Recopier ce qu'affiche la console Python. Que peut-on en déduire ?

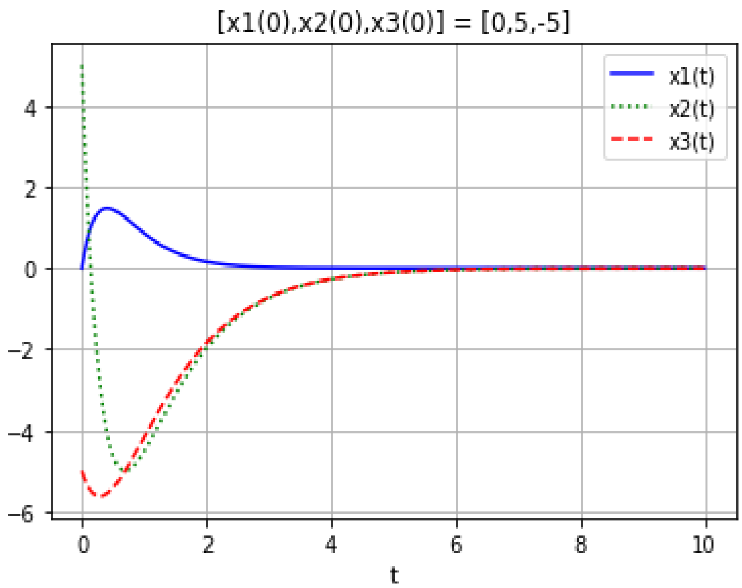
17. Que peut-on conjecturer sur les trajectoires des solutions du système différentiel $X' = AX$?.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Pour représenter les trois graphes des fonctions x_1, x_2 et x_3, on utilise le programme qui suit :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

# Definition du systeme

def syst(y, t, a11, a12, a13, a21, a22, a23, a31, a32, a33):
 x1, x2, x3 = y
 dydt = [a11*x1+ a12*x2+ a13*x3, a21*x1+ a22*x2+ a23*x3, a31*x1+ a32*x2+ a33*x3]
 return dydt

# Definition de la matrice A

a11, a12, a13 = -1, 1 , -1
a21, a22, a23 = -4, -5, 4
a31, a32, a33 = -2, -1, 0

# Condition initiale

y0 = [0,5,-5]

# Intervalle de temps pour le trace

t = np.linspace(0, 10, 501)

# Creation de la solution X

sol = odeint(syst, y0, t, args=(a11, a12, a13, a21, a22, a23, a31, a32, a33))

# Configuration du trace

plt.plot(t, sol[:, 0], 'b-', label='x1(t)')
plt.plot(t, sol[:, 1], 'g:', label='x2(t)')
plt.plot(t, sol[:, 2], 'r--', label='x3(t)')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.title(f'[x1(0),x2(0),x3(0)] = [\{y0[0]\},\{y0[1]\},\{y0[2]\}]')
plt.grid()
plt.show()
```

La compilation du programme précédent affiche le résultat suivant :



18. Faire varier les trois paramètres de la condition initiale y0 entre -10 et 10. Que remarque-t-on ?

2.2. **Cas où A possède 1 valeur propre strictement positive et 2 valeurs propres strictement négatives.** On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & 6 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

19. Recopier le programme Python suivant et le compiler.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[0, 1 , -1], [-6, -5, 6], [-4, -2, 3]])
I = np.array([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]])
print(al.matrix\_rank(A-I))
print(al.matrix\_rank(A+I))
print(al.matrix\_rank(A+2*I))

```

Recopier ce qu'affiche la console Python. A quoi correspondent ces nombres ? Que peut-on en déduire ?

Reprendre le programme de la partie précédente en

- changeant la matrice A
- en remplaçant la ligne 16 par : t = np.linspace(0, 2, 501)

20. Faire varier la condition initiale puis décrire le comportement en $+\infty$ des fonctions x_1, x_2, x_3.
On testera en particulier les conditions initiales y0 = [1,0,1], y0 = [-1, 2 ,0] et y0 = [0,1,1].

On souhaite comprendre cette observation via les résultats théoriques du cours. On admet que

- $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
- $U_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.
- $U_{-2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2.

21. Rappeler la forme générale des solutions du système $X' = AX$.

22. Exprimer $x_1(t)$ à l'aide de la formule générale puis montrer que $\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = 0$.

23. Exprimer $x_2(t)$ à l'aide de la formule générale.

24. En déduire $\lim_{t \to +\infty} x_2(t)$ en fonction des valeurs des différents paramètres.